

Introduction aux séries temporelles TD4 - Analyse spectrale

Exercice 1 Soient X et Y deux processus stationnaires décorrelés. Déterminer la mesure spectrale de $X + Y$ en fonction des mesures spectrales de X et de Y .

Exercice 2 Déterminer la mesure spectrale d'un processus MA(1), c'est-à-dire un processus stationnaire X de la forme $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ où θ est un réel et Z un bruit blanc.

Exercice 3 1. Déterminer la mesure spectrale d'un processus AR(1), i.e., d'un processus stationnaire vérifiant $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$, où $Z \in BB(0, \sigma^2)$ est un bruit blanc (avec $\sigma > 0$) et $\phi \notin \{-1, 1\}$.

2. Montrer que, si $\phi \neq \{-1, 1, 0\}$, alors il existe un bruit blanc \tilde{Z} tel que la solution stationnaire de $\tilde{X}_t = \phi^{-1} \tilde{X}_{t-1} + \tilde{Z}_t$ a la même fonction d'autocovariance que X . Quelle est la variance de \tilde{Z} ?

Exercice 4 Soient $(f(h))_{h \in \mathbb{Z}}$ et $(g(h))_{h \in \mathbb{Z}}$ deux suites réelles paires et de type positif (au sens réel). Montrer que fg est aussi de type positif. On pourra procéder de deux manières :

1. Construire un processus stationnaire dont fg soit la fonction d'autocovariance.
2. Construire une mesure finie sur $[-\pi, \pi[$ dont fg soit la transformée de Fourier (on pourra supposer que $(f(h))$ est dans ℓ^1).

Soit $\rho \in]0, 1[$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\gamma(h) = \rho^{|h|} \cos(\theta h)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.

3. Montrer que $(\gamma(h))_{h \in \mathbb{Z}}$ est de type positif.
4. Préciser sa mesure spectrale et construire un processus explicite ayant $(\gamma(h))_{h \in \mathbb{Z}}$ comme fonction d'autocovariance.

Exercice 5 On considère une équation ARMA

$$Q(B)X = P(B)Z$$

(où B l'opérateur retard) avec P et Q deux polynômes sans racines communes, et Q sans racines de module 1, de sorte que l'équation admet une unique solution stationnaire (avec $Z \in BB(0, 1)$).

1. A quelle condition sur Q la solution est-elle causale ?
2. On dit que la solution X est inversible lorsqu'il existe un filtre $(a_n) \in \ell^1$ tel que

$$Z_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X_{t-k} \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

A quelle condition sur P est-ce le cas ? Et à quelle condition supplémentaire le filtre (a_n) est-il causal ?

3. On suppose dans cette question que ni P ni Q n'ont de racines de module 1. Donner une équation ARMA

$$\tilde{Q}(B)X = \tilde{P}(B)Z$$

dont la solution ait la même autocorrélation que celle de l'équation de départ, soit causale, inversible et d'inverse causal.

4. Appliquer ce principe pour l'équation

$$X_t - 2X_{t-1} = Z_t + 3Z_{t-1}.$$